安徽信息工程学院 2018——2019 学年春季学期
《 复变函数与积分变换》课程考试试卷(A)卷答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. D　2. B　3. A　4.C　5. D　6. A

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1、i；　2、$\frac{1}{2}\ln 13 + i(\pi - \arctan\frac{3}{2})$；　3、$-\frac{i}{3}$；

4、0；　5、$\frac{1}{e}$；　6、$\cos\omega_0 t$

三、解答题（每小题 8 分，共 48 分）

1、

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}},\quad k=0,1,2,3.$$ 4 分

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i);$$

$$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

4 分

2、$v = 2x^2 + x - 2y^2$, 由于 $f(z)$ 解析，有

$$u_x = v_y = -4y,\quad u_y = -v_x = -4x-1,\ ,$$

$$du = -4ydx - (4x+1)dy = -4(ydx + xdy) - dy$$

$$= d(-4xy - y)$$

$$u = -4xy - y + C.$$ 6 分

利用 $f(0)=0$，得 $C=0$. 所以

$$f(z) = -4xy - y + i(2x^2 + x - 2y^2) = i(2z^2 + z).$$ 2 分

3、$\int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}dz = 2\pi i \frac{z}{9-z^2}\Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{5}.$　8 分

4、在 $1 < |z-2| < \infty$ 内有

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-2)}\frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$ 4 分

$$= \frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n (z-2)^{-n}] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^{-n-2}$$ 4 分

5、$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在上半平面有 2 个一阶极点 $z=i$ 和 $z=2i$.　4 分

$$\mathrm{Res}[f(z), i] = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i}{6},$$

$$\mathrm{Res}[f(z), 2i] = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z+2i)(z^2+1)} = -\frac{i}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = 2\pi i(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}) = \frac{\pi}{3}.$$ 4 分

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x = 2\pi i(\frac{i}{8} - \frac{5i}{24}) = \frac{\pi}{6}.$$ 4 分

6、

$$\mathscr{F}\,[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega),$$ 4 分

由位移性质推出

$$\mathscr{F}\,[u(t)\cos\omega_0 t] = \mathscr{F}\,[u(t)\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{j(\omega+\omega_0)} + \pi\delta((\omega+\omega_0))]$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]-\frac{j\omega}{\omega^2-\omega_0^2}.$$ 4 分

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1、$f(z)=u+iv$ 和 $\overline{f(z)}=u-iv$ 在区域 D 内解析，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$ 4 分

且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

所以 u,v 在区域 D 内为常数，即 $f(z)$ 在 D 内为常数. 4 分

2、
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega+\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega\,,$$ 4 分

根据傅氏积分定理可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ \frac{1}{2}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

故推出

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$ 4 分